Über die Cesàroschen Mittel Fourierscher Reihen.

Von Otto Szász in Frankfurt a. Main.

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion mit der Fourierschen Entwickelung

(1) $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x);$$

es sei ferner k eine reelle Zahl > -1 und

$$(1-x)^{-(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^{(k)} x^\nu = 1 + (k+1)x + \dots,$$

also

(2) $$c_\nu^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+\nu)}{1\ .\ 2\ \dots\ \nu} \sim \frac{\nu^k}{\Gamma(k+1)},\ k > -1.$$

Setzt man nun

(3) $$s_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2} c_n^{(k)} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_{n-\nu}^{(k)} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

so heissen die Summen $\frac{1}{c_n^{(k)}}\ s_n^{(k)}(x)$ die Cesàroschen Mittel k-ter Ordnung der Reihe (1). Sie konvergieren für $k > 0$ und $n \to \infty$ unter weitgehenden Bedingungen zum Funktionswert. Insbesondere ist

$$(k=0)\qquad s_n^{(0)}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = s_n$$

$$(k=1)\qquad s_n^{(1)}(x) =$$

$$= \frac{n+1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (n-\nu+1)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = s_0 + s_1 + \dots + s_n.$$

Die arithmetischen Mittel (erster Ordnung)

$$\frac{s_n^{(1)}(x)}{n+1} = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = \sigma_n$$

wurden von Herrn Fejér mit grossem Erfolg in diese Theorie eingeführt. In zwei Arbeiten zeigte ich kürzlich, dass durch diese Mittel nicht nur der Funktionswert, sondern auch andere, mit der Funktion eng zusammenhängende Werte dargestellt werden können. Es gilt nämlich der Satz:

Wenn die Funktion $f(x)$ bei passender Wahl der Grössen s, g und α $(0 < \alpha \leqq 1)$ der Bedingung genügt

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{h^{1+\alpha}} \int_0^h |f(x+2t) + f(x-2t) - 2s - gt^{\alpha}|\, dt \to 0 \text{ für } h \to +0,$$

so gilt für die Mittel erster Ordnung

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\sigma_n - s) = \frac{g}{\pi} \cdot \gamma, \text{ falls } 0 < \alpha < 1, \; \gamma = \frac{\Gamma(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{(1-\alpha) 2^{\alpha}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(\sigma_n - s) = \frac{g}{2\pi}, \text{ falls } \alpha = 1.$$

Wenn insbesondere die Grenzwerte

$$\text{(4')} \qquad \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \to r, \; \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} \to l, \; t \to +0,$$

existieren, so ist die Voraussetzung (4) mit

$$s = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \; g = 2(r-l), \; \alpha = 1$$

erfüllt, dann ist also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(\sigma_n - s) = \frac{r-l}{\pi}.$$ [1]

Der Spezialfall $g = 0$ liefert den Satz:

Aus

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}} \int_0^h |f(x+2t) + f(x-2t) - 2s|\, dt \to 0 \text{ für } h \to +0$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\sigma_n - s) = 0, \text{ falls } 0 < \alpha < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}(\sigma_n - s) = 0, \text{ falls } \alpha = 1.$$

Für $\alpha = 0$ erhält man einen bekannten Satz von Lebesgue.

---

[1] Szász, *a*) A Fourier-féle sorok számtani közepeiről, Math. Phys. Lapok XXXII, 1925, p. 15—25. *b*) Über die arithmetischen Mittel Fourierscher Reihen, Acta Math. 48, 1926, p. 353—362.

Im folgenden zeige ich, dass entsprechende Sätze für die CESÀROschen Mittel k-ter Ordnung gelten, falls $0<k<1$ ist.

§ 1. *Der Fall* $g=0$.

Es sei also zunächst

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s|\,dt\to 0 \text{ für } h\to +0; \tag{5}$$

ich gehe aus von der bekannten Formel

$$s_n^{(k)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\left(\frac{1}{2}c_n^{(k)}+\sum_{\nu=1}^{n} c_{n-\nu}^{(k)}\cos\nu t\right)dt$$

$$=\frac{c_n^{(k)}}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]\,H_n(t)\,dt.$$

Hierbei ist

$$c_n^{(k)}H_n(t)=\frac{1}{2}c_n^{(k)}+\sum_{\nu=1}^{n} c_{n-\nu}^{(k)}\cos\nu t \tag{6}$$

und

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi H_n(t)\,dt=1.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2s]\,H_n(t)\,dt\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)\,H_n(2t)\,dt,\end{aligned} \tag{7}$$

wobei

$$f(x+2t)+f(x-2t)-2s=\varphi(t)$$

gesetzt ist.

Es sei nun $0<k<1$; dann gelten die Ungleichungen[2])

---

[2]) Sie wurden von den Herren M. RIESZ und S. CHAPMAN gefunden; man vgl. z. B. M. RIESZ, Sur la sommation des séries de Fourier, Acta Litterarum ac Scientiarum Univ. Francisco-Josephinae. Szeged, I, (1923), p. 104–113.

$$\left.\begin{array}{ll}(8a) & |H_n(t)| < A_1 n \\ (8b) & |H_n(t)| < A_2 n^{-k} t^{-k-1}\end{array}\right\} \quad 0 < t < \pi.\text{[3]}$$

Hieraus ergibt sich leicht eine Abschätzung der rechten Seite von (7). Sei nämlich $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, sonst beliebig. Nach der Voraussetzung (5) kann man $\delta = \delta(\varepsilon) < 1$ so bestimmen, dass

$$\int_0^h |\varphi(t)|\,dt < \varepsilon h^{1+\alpha} \text{ für } h < \delta.$$

Es sei ferner $\frac{1}{n} < \delta$, also $n > \frac{1}{\delta}$; dann ist nach (8a)

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t) H_n(2t)\,dt\right| < A_1 n \,.\, \varepsilon n^{-1-\alpha} = A_1 \varepsilon \,.\, n^{-\alpha}$$

Sodann ist nach (8b)

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \varphi(t) H_n(2t)\,dt\right| \leqq A_3 n^{-k} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)|\, t^{-k-1}\,dt,$$

und partielle Integration ergibt

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)|\, t^{-k-1} dt = \left[t^{-k-1} \int_{\frac{1}{n}}^{t} |\varphi(\tau)|\,d\tau\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \left[(k+1)\, t^{-k-2} \int_{\frac{1}{n}}^{t} |\varphi(\tau)|\,d\tau\right] dt$$

$$< \delta^{-k-1} .\, \varepsilon \delta^{1+\alpha} + \varepsilon\,(k+1) \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{\alpha-k-1}\,dt \leqq \varepsilon n^{k-\alpha} + \varepsilon\,(k+1) \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{\alpha-k-1}\,dt.$$

Hieraus folgt

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \varphi(t) H_n(2t)\,dt\right| <$$

$$< \begin{cases} \varepsilon A_3 \left(n^{-\alpha} + \dfrac{k+1}{k-\alpha} n^{-k} .\, n^{k-\alpha}\right) = \varepsilon A_3 n^{-\alpha} \dfrac{2k-\alpha+1}{k-\alpha}, & \alpha < k \\ \varepsilon A_3 \left(n^{-k} + (k+1)\, n^{-k} \lg n\right) & , \alpha = k. \end{cases}$$

Schliesslich ist nach (8b)

$$\left|\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\, H_n(2t)\,dt\right| \leqq \frac{A_2}{(2\delta)^{k+1}} \cdot \frac{1}{n^k} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)|\,dt < \frac{A_4}{n^k} \cdot \frac{1}{\delta^{k+1}} \cdot$$

---

[3]) $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bedeuten nur von k abhängende Konstanten.

Es ist also für $n > n(\varepsilon)$

$$\left|\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right| n^\alpha < \varepsilon \,.\, A_5 \frac{2k-\alpha+1}{k-\alpha} \quad \text{für } \alpha < k,$$

$$\left|\frac{s_n^{(k)}}{c_n^{(k)}} - s\right| \frac{n^k}{\log n} < \varepsilon \,.\, A_6 \quad \text{für } \alpha = k.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \quad \text{für } \alpha < k,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\log n} \left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \quad \text{für } \alpha = k$$

Somit gilt der Satz:

I. *Es sei* $0 < k < 1$, $f(x)$ *integrierbar* (L) *und* $\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}$ *die* Cesàro*schen Mittel k-ter Ordnung ihrer* Fourier*schen Reihe; es sei* $0 \leqq \alpha \leqq k$; *wenn bei geeigneter Wahl von s*

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}} \int_0^h |f(x+2t) + f(x-2t) - 2s|\, dt \to 0 \quad \text{für } h \to +0,$$

so ist

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \quad \textit{für } 0 \leqq \alpha < k$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\log n} \left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}} - s\right) = 0 \ \textit{für } \alpha = k.$$

Für $\alpha = 0$ erhält man die Hardysche Verallgemeinerung eines bekannten Lebesgueschen Satzes und den von Herrn M. Riesz hierfür gegebenen Beweis.[4])

Einen Satz, der etwas weniger besagt als I, hat auf ähnlichem Wege — anschliessend an meine unter 1a) zitierte Arbeit — Herrn Alexits bewiesen.[5])

Ich habe den Fall $g = 0$ vorweggenommen, da der allgemeine Fall etwas umständlichere Rechnung erfordert. In einem Punkte lässt sich hier wie auch in § 1 die Rechnung vereinfachen; wir können nämlich die Zerlegung des Integrals (7) in drei Teile

[4]) M. Riesz a. a. O. [2]).

[5]) Das Manuskript seiner Arbeit hat mir zur Begutachtung seitens der Redaktion kürzlich (September 1926) vor dem endgültigen Abschluss meines Manuskripts vorgelegen.

vermeiden, ähnlich wie es Herr FEJÉR[6]) beim Beweise des LEBESGUEschen Satzes getan hat.

§ 2. *Der allgemeine Fall: g beliebig.*

Ich setze jetzt voraus, dass

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-gt^\alpha|\,dt \to 0 \text{ für } h\to 0.$$

Aus (7) folgt nun

$$(9)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi(t)-gt^\alpha)\,H_n(2t)\,dt = \frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s-\frac{2g}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha H_n(2t)\,dt;$$

die Abschätzung könnte zunächst wie beim Integral (7) vorgenommen werden. Man kann aber auch so schliessen:

Aus (8b) folgt

$$(tn)^{k+1}|H_n(t)| < A_2 n, \text{ oder } tn\,|H_n(t)|^{\frac{1}{k+1}} < A_7\, n^{\frac{1}{k+1}},$$

ferner aus (8a) $\qquad |H_n(t)|^{\frac{1}{k+1}} < A_8\, n^{\frac{1}{k+1}};$

daher ist

$$(1+tn)\,|H_n(t)|^{\frac{1}{k+1}} < A_9\, n^{\frac{1}{k+1}},$$

und schliesslich

$$(1+tn)^{k+1}\,|H_n(t)| < A_{10}\, n,\quad 0<t<\pi,\quad n=1,2,3,\ldots$$

Nunmehr wird

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi(t)-gt^\alpha)\;H_n(2t)\,dt\right| \leqq A_{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi(t)-gt^\alpha)\,\frac{n\,dt}{(1+2tn)^{k+1}};$$

setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^t |\varphi(t)-gt^\alpha|\,dt = \Phi(t),$$

so erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(t)-gt^\alpha|\,\frac{n\,dt}{(1+2tn)^{k+1}} = \frac{n\Phi(t)}{(1+2tn)^{k+1}}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2(k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,\frac{n^2\,dt}{(1+2tn)^{k+2}}$$

---

[6]) L. FEJÉR, Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1925, p. 13—17. Vgl. auch die Abschätzung in meiner unter 1b) zitierten Arbeit.

$$=\frac{n\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(1+\pi n)^{k+1}}+2(k+1)n^{1-\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Phi(t)}{t^{1+\alpha}}\cdot\frac{(nt)^{1+\alpha}}{(1+2tn)^{k+2}}\,dt$$

$$\leqq\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n^k}+2(k+1)n^{1-\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,.\,t^{-1-\alpha}\,.\,(1+2nt)^{\alpha-k-1}\,dt.$$

Nach Voraussetzung gibt es nun zu beliebigem $\varepsilon>0$ ein $\delta<1$, sodass

$$\Phi(t)\,.\,t^{-1-\alpha}<\varepsilon \text{ für } t<\delta=\delta(\varepsilon);$$

somit wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,t^{-1-\alpha}(1+2nt)^{\alpha-k-1}\,dt<\varepsilon\int_0^{\delta}(1+2nt)^{\alpha-k-1}\,dt+$$

$$+(1+2n\delta)^{\alpha-k-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,t^{-1-\alpha}\,dt$$

$$<\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{k-\alpha}\cdot\dfrac{1}{2n}+(n\delta)^{\alpha-k-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)t^{-1-\alpha}\,dt \text{ für } \alpha<k\\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{2n}\lg(1+2n)+(n\delta)^{-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)t^{-1-k}\,dt \text{ für } \alpha=k.\end{cases}$$

Also wird

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\varphi(t)-gt^{\alpha})\,H_n(2t)\,dt\right|<$$

$$<\begin{cases}\dfrac{A_{11}}{n^k}+\dfrac{\varepsilon A_{12}}{k-\alpha}n^{-\alpha}+A_{13}\,n^{-k}\,\delta^{\alpha-k-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,t^{-1-\alpha}dt,\ \alpha<k\\[2ex] \dfrac{A_{11}}{n^k}+\varepsilon A_{14}n^{-k}\lg(1+2n)+A_{15}n^{-k}\delta^{-1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)t^{-1-k}dt,\ \alpha=k.\end{cases}$$

Hieraus und aus (9) folgt nun unmittelbar

$$\text{(10a)}\quad \lim_{n\to\infty}\left\{n^{\alpha}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s\right)-\frac{2g}{\pi}n^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} H_n(2t)dt\right\}=0,\ \text{für } \alpha<k,$$

$$\text{(10b)}\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^k}{\lg n}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s\right)-\frac{2g}{\pi}\frac{n^k}{\lg n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k H_n(2t)\,dt\right\}=0,\ \alpha=k.$$

Ich zeige nun, dass die Grenzwertbeziehung besteht

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} H_n(2t)dt=\frac{\pi}{2^{2+\alpha}}\cdot\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\alpha+k)\cos\frac{\alpha\pi}{2}},\ 0<\alpha\leq k<1.$$

Nach einer bekannten Umformung folgt aus (6)

$$c_n^{(k)} H(t)=\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\ \nu}^{(k-1)}\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

also

$$c_n^{(k)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha} H_n(2t)dt=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(k-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\frac{\sin(2\nu+1)t}{\sin t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(k-1)}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1}\sin(2\nu+1)t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\sin(2\nu+1)t\,dt\right].$$

Ich zeige nun zunächst, dass

$$\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}=u(t)\ \text{ monoton wächst für }\ 0<t<\frac{\pi}{2};$$

das heisst

$$u'(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{\cos t}{\sin^2 t}>0,\ 0<t<\frac{\pi}{2},$$

oder

$$\sin^2 t-t^2\cos t>0,\ 0<t<\frac{\pi}{2}.$$

Nun ist offenbar

$$\sin t > t - \frac{t^3}{6} > 0 \text{ für } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

und

$$\cos t < 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24},$$

also ist

$$\sin^2 t - t^2 \cos t > t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{36} - t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) =$$

$$= \frac{t^4}{6} - \frac{t^6}{12}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{t^4}{6}\left(1 - \frac{t^2}{12}\right) > 0,\ 0 < t < \frac{\pi}{2}. \text{ Qu. e. d.}$$

Erst recht ist nun

$$t^\alpha\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) \text{ monoton wachsend für } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung wird nun

$$I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\sin(2\nu+1)t\,dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\int_\zeta^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\nu+1)t\,dt,$$

wobei $0 < \zeta < \frac{\pi}{2}$ ist. Hieraus ergibt sich

$$(11) \qquad |I_\nu| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{|\cos(2\nu+1)\zeta|}{2\nu+1} < \frac{1}{2\nu+1}.$$

Ferner ist offenbar

$$B_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1}\sin(2\nu+1)t\,dt = \frac{1}{(2\nu+1)^\alpha}\int_0^{(2\nu+1)\frac{\pi}{2}} t^{\alpha-1}\sin t\,dt,$$

also

$$\lim_{\nu\to\infty} B_\nu \cdot (2\nu+1)^\alpha = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\sin t\,dt = \Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}.^{7)}$$

Hieraus und aus (11) folgt

$$\lim_{\nu\to\infty}(2\nu+1)^\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha\frac{\sin(2\nu+1)t}{\sin t}\,dt = \Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2},\ 0 < \alpha < 1,$$

[7]) Vgl. z. B. G. F. Meyer, Vorl. ü. die Theorie d. bestimmten Integrale, Leipzig 1871, p. 182.

und schliesslich mit Rücksicht auf (2) und auf einen Satz des Herrn KNOPP[8])

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha H_n(2t)\,dt = \frac{\Gamma(k+1)}{2^{1+\alpha}\,\Gamma(k)}\,\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}.\,\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(k)}{\Gamma(1-\alpha+k)}$$

$$= \frac{1}{2^{1+\alpha}}\,\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.\,\sin\frac{\alpha\pi}{2}.\,\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\alpha+k)}\,{}^{9)}$$

oder

$$(12)\quad \lim n^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha H_n(2t)\,dt = \frac{\pi\,.\,\Gamma(1+k)}{2^{2+\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}.\,\Gamma(1+k-\alpha)},\,0<\alpha\leqq k<1.$$

Aus (10a), (10b) und (12) folgt nun der Satz:

II. *Es sei* $0<\alpha\leqq k<1$, *$f(x)$ integrierbar (L) und*

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-gt^\alpha|\,dt\to 0,\ h\to+0;$$

dann ist

$$(13a)\quad \lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s\right) = g.\,\frac{\Gamma(1+k)}{2^{1+\alpha}\,\Gamma(1+k-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\ \textit{für}\ \alpha<k,$$

$$(13b)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{\lg n}\left(\frac{s_n^{(k)}(x)}{c_n^{(k)}}-s\right)=0 \qquad \textit{für}\ \alpha=k.$$

Für $k=1$ geht die Beziehung (13a) in Satz II. meiner unter 1b) zitierten Arbeit über, sodass also (13a) unverändert auch für $k=1$ gilt. Dagegen entspricht nach Satz I. derselben Arbeit der Beziehung (13b) für $k=1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lg n}\left(\frac{s_n^{(1)}(x)}{n+1}-s\right)=\frac{g}{2\pi}.$$

Das abweichende Verhalten im Falle $\alpha=k<1$ hängt damit zusammen, dass die Integrale

---

8) K. KNOPP, Über Summen der Form $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, Rendiconti Circ. Matem. Palermo XXXII, 1911, p. 95—110; insbes. Satz VII.

9) Wegen $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$. — Eine andere Berechnung dieses Grenzwertes hat mir Herr SZEGŐ brieflich mitgeteilt.

$$L_n^{(k)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k H_n(2t)\, dt, \quad \overline{L}_n^{(k)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^k \,|\, H_n(2t) \,|\, dt$$

für $k < 1$ nicht dieselbe Grössenordnug haben[10]). Dagegen ist für $k = 1$ geradezu

$$L_n^{(1)} = \overline{L}_n^{(1)}.$$

Es lässt sich aber zeigen, dass auch in (13b) der Faktor $\frac{n^k}{lg\, n}$ durch keinen schwächer anwachsenden ersetzt werden kann. Ich komme hierauf an anderer Stelle zurück.

(*Eingegangen den 2. XII. 1926.*)

[10]) Man beachte, dass $H_n(t)$ von k abhängt und in Falle $k < 1$ kein konstantes Vorzeichen hat.